अध्याय 10

वृत्त

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

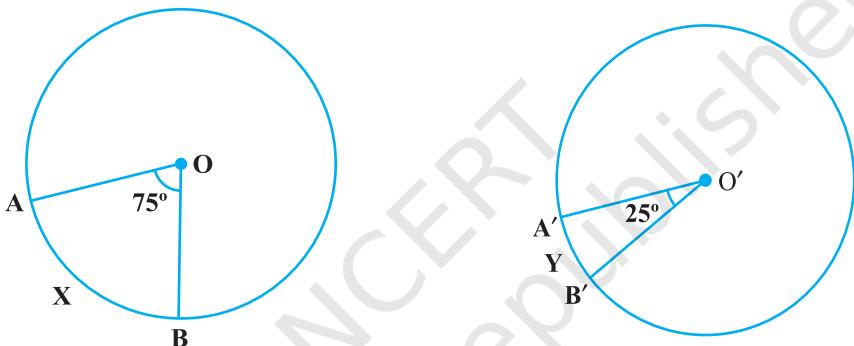
वृत्त, त्रिज्या, व्यास, जीवा, वृत्तखंड, चक्रीय चतुर्भुज।

- एक वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों) की समान (या बराबर) जीवाएँ केंद्र (या केंद्रों) पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।
- यदि एक वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों) की जीवाएँ केंद्र (या केंद्रों) पर बराबर कोण अंतरित करें तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं।
- वृत्त के केंद्र से उसकी किसी जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।
- किसी वृत्त के केंद्र से होकर उसकी जीवा को समद्विभाजित करती हुई रेखा जीवा पर लंब होती है।
- दिए हुए तीन असंरेख बिंदुओं से होकर एक और केवल एक ही वृत्त खींचा जा सकता है।
- एक वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों) की बराबर जीवाएँ केंद्र (या केंद्रों) से समदूरस्थ होती हैं।
- वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ बराबर होती हैं।
- यदि एक वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं तथा विलोमत: यदि दो चाप सर्वांगसम हों तो उनकी संगत जीवाएँ बराबर होती हैं।
- एक वृत्त के सर्वांगसम चाप केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।
- किसी चाप द्वारा वृत्त के केंद्र पर बनाया गया कोण वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है।
- एक ही वृत्त-खंड में बने कोण बराबर होते हैं।
- यदि दो बिंदुओं को मिलाने पर बना रेखाखंड उस रेखाखंड को अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो बिंदुओं पर बराबर कोण अंतरित करे (बनाए), तो ये चारों बिंदु चक्रीय होते हैं।

- एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है।
- यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के एक युग्म का योग 180° हो, तो वह चतुर्भुज चक्रीय होता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1: आकृति 10.1 में दो सर्वांगसम वृत्तों के केंद्र O और O′ हैं। चाप AXB केंद्र O पर 75° का कोण अंतरित करता है तथा चाप A′ Y B′ केंद्र O′ पर 25° का कोण अंतरित करता है। तब चाप A X B और A′ Y B′ का अनुपात है

आकृति 10.1

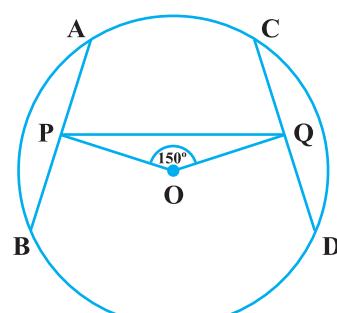
(A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 3 : 1 (D) 1 : 3

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 10.2 में, AB और CD केंद्र O वाले वृत्त की दो बराबर जीवाएँ हैं। OP और OQ क्रमश: AB और CD जीवाओं पर लंब हैं। यदि ∠POQ = 150° है, तो ∠APQ बराबर है

(A) 30° (B) 75°

(C) 15° (D) 60°

हल : उत्तर (B)

आकृति 10.2

प्रश्नावली 10.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. किसी वृत्त का AD एक व्यास है और AB एक जीवा है। यदि AD = 34 cm, AB = 30 cm है, तो वृत्त के केंद्र से AB की दूरी है

(A) 17 cm (B) 15 cm (C) 4 cm (D) 8 cm

2. आकृति 10.3 में, यदि OA = 5 cm, AB = 8 cm तथा OD जीवा AB पर लंब है, तो CD बराबर है

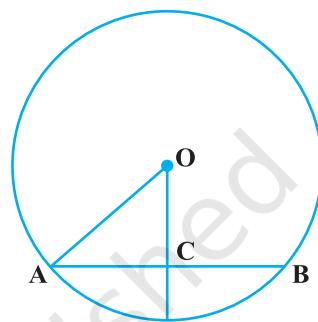
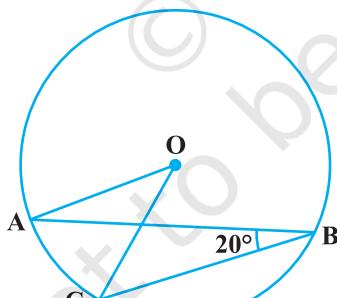
(A) 2 cm (B) 3 cm
(C) 4 cm (D) 5 cm

आकृति 10.3

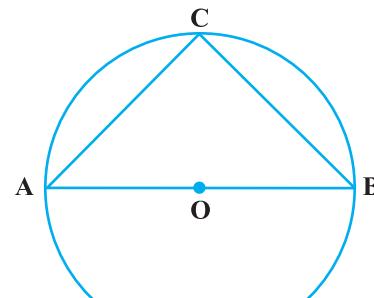
3. यदि AB = 12 cm, BC = 16 cm और AB रेखाखंड BC पर लंब है, तो A, B और C से होकर जाने वाले वृत्त की त्रिज्या है

(A) 6 cm (B) 8 cm
(C) 10 cm (D) 12 cm

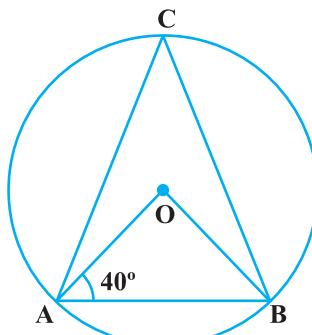
4. आकृति 10.4 में, यदि ∠ABC = 20º है, तो ∠AOC बराबर है

(A) 20º (B) 40º (C) 60º (D) 10º

आकृति 10.4

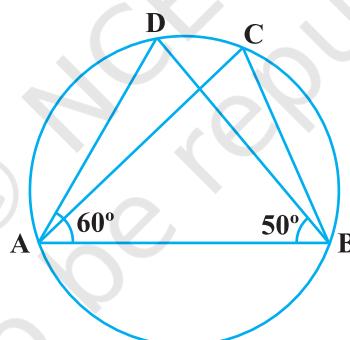
5. आकृति 10.5 में, यदि AOB वृत्त का एक व्यास तथा AC = BC है, तो ∠CAB बराबर है

(A) 30º (B) 60º
(C) 90º (D) 45º

आकृति 10.5

6. आकृति 10.6 में, यदि $\angle OAB = 40^\circ$ है, तो $\angle ACB$ बराबर है

(A) 50° (B) 40° (C) 60° (D) 70°

आकृति 10.6

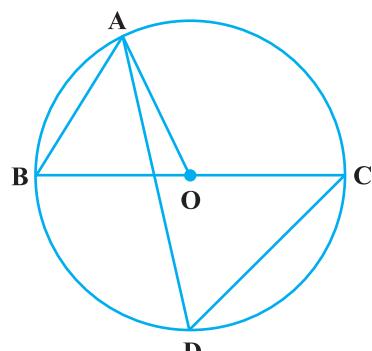
7. आकृति 10.7 में, यदि $\angle DAB = 60^\circ$, $\angle ABD = 50^\circ$ है, तो $\angle ACB$ बराबर है

(A) 60° (B) 50° (C) 70° (D) 80°

आकृति 10.7

8. ABCD एक ऐसा चक्रीय चतुर्भुज है कि AB इस चतुर्भुज के परिगत वृत्त का एक व्यास है तथा $\angle ADC = 140^\circ$ है। तब, $\angle BAC$ बराबर है

(A) 80° (B) 50°

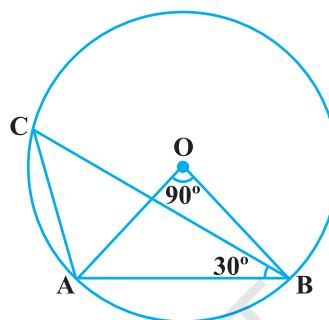
(C) 40° (D) 30°

9. आकृति 10.8 में, BC वृत्त का व्यास है तथा $\angle BAO = 60^\circ$ है। तब, $\angle ADC$ बराबर है

आकृति 10.8

(A) 30º (B) 45º

(C) 60º (D) 120º

10. आकृति 10.9 में, ∠AOB = 90º और ∠ABC = 30º है। तब, ∠CAO बराबर है :

(A) 30º (B) 45º (C) 90º (D) 60º

आकृति 10.9

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या असत्य लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1: किसी जीवा द्वारा वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं पर अंतरित कोण बराबर होते हैं।

हल : असत्य। यदि दोनों बिंदु केवल एक ही वृत्तखंड (दीर्घ या लघु) में स्थित होते हैं, तभी बराबर होते हैं, अन्यथा नहीं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक वृत्त की जीवाएँ जिनकी लंबाईयाँ 10 cm और 8 cm हैं केंद्र से क्रमशः 8.0 cm और 3.5 cm की दूरियों पर हैं।

हल : असत्य। क्योंकि बड़ी जीवा केंद्र से कम दूरी पर होती है।

प्रश्नावली 10.2

*निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए **सत्य** या **असत्य** लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए –*

1. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD में से प्रत्येक केंद्र से 4 cm की दूरी पर है। तब, AB = CD है।

2. केंद्र O वाले वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC, OA के विपरीत ओर स्थित हैं। तब, ∠OAB = ∠OAC है।

3. O और O′ केंद्रों वाले दो सर्वांगसम वृत्त A और B दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं। तब, ∠AOB = ∠AO′B है।

4. तीन संरेख बिंदुओं से होकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।

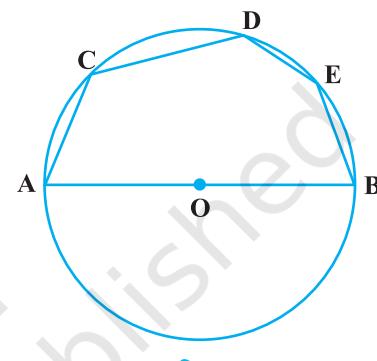
5. दो बिंदुओं A और B से होकर 3 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचा जा सकता है, यदि AB = 6 cm है।

6. AOB वृत्त का एक व्यास है तथा C वृत्त पर स्थित कोई बिंदु है। तब, $AC^2 + BC^2 = AB^2$ है।

7. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें ∠A = 90°, ∠B = 70°, ∠C = 95° और ∠D = 105° है।

8. यदि A, B, C, और D चार बिंदु इस प्रकार हैं कि ∠BAC = 30° और ∠BDC = 60° है, तो D उस वृत्त का केंद्र है, जो A, B और C बिंदुओं से होकर खींचा जाता है।

9. यदि A, B, C और D चार बिंदु इस प्रकार हैं कि ∠BAC = 45° और ∠BDC = 45° है, तो A, B, C और D चक्रीय है।

10. आकृति 10.10 में, यदि AOB एक व्यास है और ∠ADC = 120° है, तो ∠CAB = 30° है।

आकृति 10.10

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: आकृति 10.11 में, AOC वृत्त का एक व्यास है तथा चाप AXB = $\frac{1}{2}$ चाप BYC है। ∠BOC ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.11

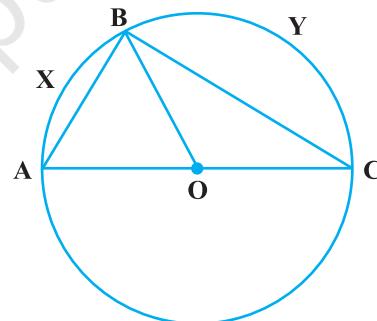
हल :

क्योंकि चाप AXB = $\frac{1}{2}$ चाप BYC है, इसलिए

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \angle BOC$$

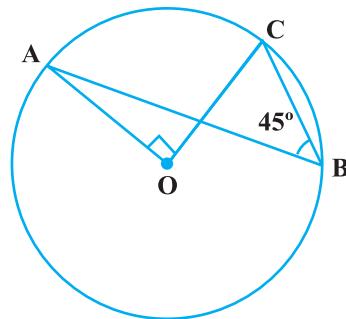
साथ ही, $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$

अतः, $\frac{1}{2} \angle BOC + \angle BOC = 180^\circ$

या $\angle BOC = \frac{2}{3} \times 180^\circ = 120^\circ$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 10.12 में, $\angle ABC = 45^\circ$ है। सिद्ध कीजिए कि $OA \perp OC$ है।

हल : $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$ है।

अर्थात् $\angle AOC = 2\angle ABC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

या $OA \perp OC$

आकृति 10.12

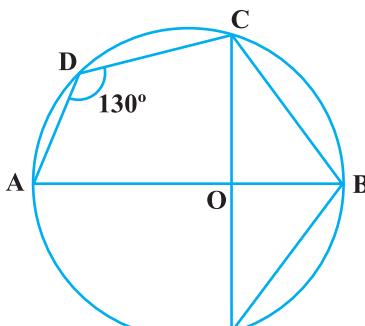
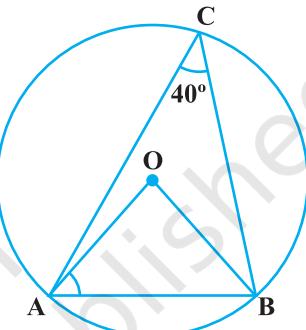
प्रश्नावली 10.3

1. यदि एक वृत्त के चाप AXB और CYD सर्वांगसम हैं तो AB और CD का अनुपात ज्ञात कीजिए।
2. यदि एक वृत्त PXAQBY की एक जीवा AB का लंब समद्विभाजक वृत्त को P और Q बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है, तो सिद्ध कीजिए कि चाप PXA $\cong$ चाप PYB है।
3. A, B और C किसी वृत्त पर स्थित तीन बिंदु हैं। सिद्ध कीजिए कि AB, BC और CA के लंब समद्विभाजक संगामी हैं।
4. AB और AC एक वृत्त की दो बराबर जीवाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC$ का समद्विभाजक वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।
5. यदि वृत्त की दो जीवाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त के केंद्र से होकर जाता है, तो सिद्ध कीजिए कि दोनों जीवाएँ समांतर हैं।
6. ABCD एक ऐसा चतुर्भुज है कि A शीर्षों B, C और D से होकर जाने वाले वृत्त का केंद्र है। सिद्ध कीजिए कि $\angle CBD + \angle CDB = \frac{1}{2} \angle BAD$ है।
7. O त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है तथा D आधार BC का मध्य-बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि $\angle BOD = \angle A$ है।
8. एक उभयनिष्ठ कर्ण AB पर दो समकोण त्रिभुज ACB और ADB इस प्रकार खींचे गए हैं कि वे विपरीत ओर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC = \angle BDC$ है।
9. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC उसके केंद्र पर क्रमश: 90° और 150° के कोण अंतरित करती हैं। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए, यदि AB और AC केंद्र के विपरीत ओर स्थित हैं।
10. यदि BM और CN त्रिभुज ABC की भुजाओं AC और AB पर खींचे गए लंब हैं, तो सिद्ध कीजिए कि बिंदु B, C, M और N चक्रीय हैं।
11. यदि किसी समद्विबाहु त्रिभुज के आधार के समांतर कोई रेखा उसकी बराबर भुजाओं को प्रतिच्छेद करने के लिए खींची जाए, तो सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बना चतुर्भुज चक्रीय होता है।

12. यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर है, तो सिद्ध कीजिए कि इसके विकर्ण भी बराबर हैं।

13. एक त्रिभुज ABC का परिकेंद्र O है। सिद्ध कीजिए कि $\angle OBC + \angle BAC = 90^\circ$ है।

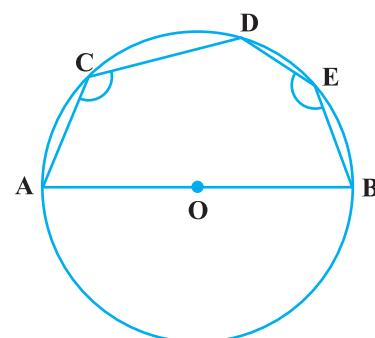
14. किसी वृत्त की एक जीवा उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्तखंड में किसी बिंदु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।

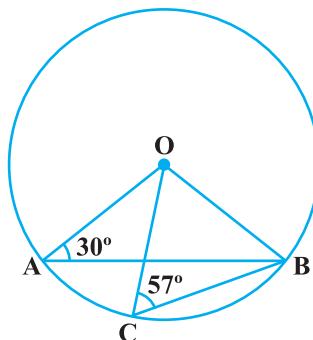
15. आकृति 10.13 में, $\angle ADC = 130^\circ$ और जीवा BC = जीवा BE है। $\angle CBE$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.13

आकृति 10.14

16. आकृति 10.14 में, $\angle ACB = 40^\circ$ है। $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।

17. एक चतुर्भुज ABCD एक वृत्त के अंतर्गत इस प्रकार है कि AB वृत्त का व्यास है और $\angle ADC = 130^\circ$ है। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।

18. केंद्रों O और O′ वाले दो वृत्त बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। A (या B) से होकर एक रेखा PQ रेखाखंड OO′ के समांतर खींची जाती है, जो वृत्तों को P और Q पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि PQ = 2 OO′ है।

19. आकृति 10.15 में, AOB वृत्त का व्यास है तथा C, D और E अर्धवृत्त पर स्थित कोई तीन बिंदु हैं। $\angle ACD + \angle BED$ का मान ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.15

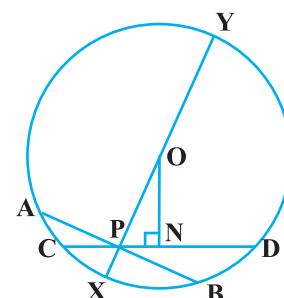
20. आकृति 10.16 में, $\angle OAB = 30°$ और $\angle OCB = 57°$ है। $\angle BOC$ और $\angle AOC$ ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.16

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : सिद्ध कीजिए कि दो वृत्त परस्पर दो से अधिक बिंदुओं पर प्रतिच्छेद नहीं कर सकते।

हल : मान लीजिए कि दो वृत्त ऐसे हैं, जो A, B और C तीन बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं। स्पष्टतः A, B और C संरेख नहीं हैं। हम जानते हैं कि तीन असंरेख बिंदुओं से होकर एक और केवल एक ही वृत्त खींचा जा सकता है। अतः बिंदुओं A, B और C से होकर दो वृत्त नहीं खींचे जा सकते हैं। दूसरे शब्दों में, दो वृत्त दो से अधिक बिंदुओं पर प्रतिच्छेद नहीं कर सकते हैं।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : सिद्ध कीजिए की वृत्त के अंदर किसी बिंदु से होकर जाने वाली सभी जीवाओं में से वह जीवा सबसे छोटी होती है, जो उस बिंदु से होकर जाने वाले व्यास पर लंब होती है।

हल : मान लीजिए कि केंद्र O वाले वृत्त के अंदर P कोई बिंदु है। P से होकर जाने वाले व्यास XY पर लंब एक जीवा AB खींचिए जो P से होकर जाए। माना CD, बिंदु P से होकर जाती हुई एक अन्य जीवा है। O से CD पर ON लंब खींजिए। तब ΔONP एक समकोण त्रिभुज है (आकृति 10.17)। इसलिए, इसका कर्ण OP भुजा ON से बड़ा है। हम जानते हैं कि वह जीवा जो केंद्र से निकटतम दूरी पर होती है उस जीवा से बड़ी होती है जो केंद्र से अधिक दूरी पर होती है। अतः $CD > AB$ है। अतः:, AB बिंदु P से होकर जाने वाली जीवाओं में सबसे छोटी है।

आकृति 10.17

प्रश्नावली 10.4

1. यदि एक वृत्त की दो बराबर जीवाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के दो भाग दूसरी जीवा के दोनों भागों के पृथक-पृथक बराबर होते हैं।

2. यदि एक समलंब की असमांतर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि यह एक चक्रीय चतुर्भुज है।

3. यदि P, Q और R क्रमशः एक त्रिभुज की BC, CA और AB भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं तथा AD शीर्ष A से BC पर लंब है, तो सिद्ध कीजिए कि बिंदु P, Q, R और D चक्रीय हैं।

4. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। A और B से होकर एक वृत्त इस प्रकार खींचा जाता है कि वह AD को P पर और BC को Q पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि P, Q, C और D चक्रीय हैं।

5. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक और उसकी सम्मुख भुजा का लंब समद्विभाजक, यदि प्रतिच्छेद करते हैं तो, उस त्रिभुज के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करते हैं।

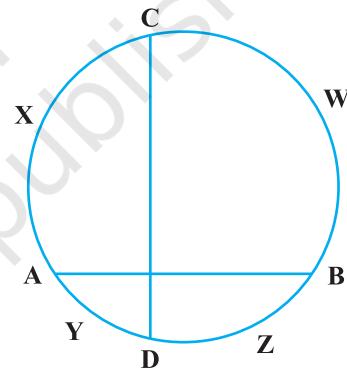
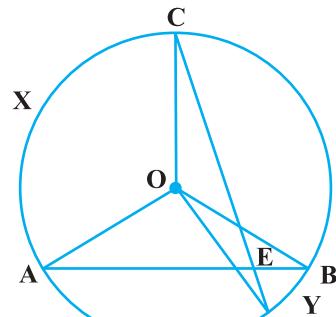
6. यदि किसी वृत्त AYDZBWCX की दो जीवाएँ AB और CD समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं (आकृति 10.18), तो सिद्ध कीजिए कि चाप CXA + चाप DZB = चाप AYD + चाप BWC = एक अर्धवृत्त है।

आकृति 10.18

7. यदि ABC किसी वृत्त के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज है तथा P लघु चाप BC पर स्थित कोई बिंदु है, जो B या C के संपाती नहीं है, तो सिद्ध कीजिए कि PA कोण BPC का समद्विभाजक है।

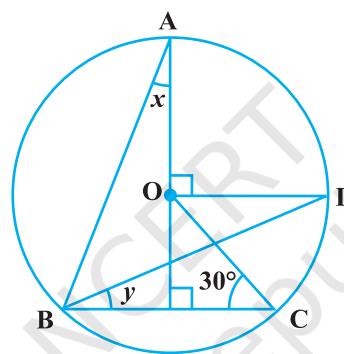
8. आकृति 10.19 में, AB और CD एक वृत्त की दो जीवाएँ हैं, जो E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle AEC = \frac{1}{2}$ (चाप CXA द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण + चाप DYB द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण) है।

आकृति 10.19

9. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोणों के समद्विभाजक इस चतुर्भुज के परिगत वृत्त को P और Q, बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि PQ इस वृत्त का व्यास है।

10. एक वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{2}$ cm है। 2 cm लंबाई वाली जीवा द्वारा यह वृत्त दो वृत्त-खंडों में विभाजित किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्त-खंड के किसी बिंदु पर बना कोण 45° है।

11. एक वृत्त की दो बराबर AB और CD जीवाएँ बढ़ाने पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि PB = PD है।

12. AB और AC त्रिज्या r वाले एक वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं कि AB = 2AC है। यदि p और q क्रमश: केंद्र से AB और AC की दूरियाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $4q^2 = p^2 + 3r^2$ है।

13. आकृति 10.20 में, O वृत्त का केंद्र है और ∠BCO = 30° है। x और y ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.20

14. आकृति 10.21 में, O वृत्त का केंद्र है, BD = OD और CD ⊥ AB है। ∠CAB ज्ञात कीजिए।

आकृति 10.21